Physicité

IPhO : Relativité Restreinte

L'espace par lui-même et le temps par lui-même sont condamnés à s'effacer en de simples ombres, et seule une sorte d'union des deux restera indépendante.
– Hermann Minkowski

1 Motivations historiques

La théorie de la relativité restreinte a été inventée par Mileva et Albert Einstein en 1905, et elle a révolutionné la façon dont nous comprenons le monde. Pourtant, la théorie repose sur deux principes très simples, formulés bien avant. Le premier est celui de la relativité, inventé par Galilée en 1632. Le deuxième est le principe selon lequel la vitesse de la lumière est constante, principe impliqué par la théorie de Maxwell inventée entre 1850 et 1870. Ces deux principes, à première vue contradictoires, peuvent être naturellement unifiés en une seule théorie : une théorie qui parle de la structure même de l'espace-temps, la théorie de la relativité restreinte.

1.1 La relativité de Galilée

Penchons nous d'abord sur la relativité de Galilée. Cette théorie nous dit que la physique est partout la même.

Si deux personnes sont d'un côté ou de l'autre de la Terre, ils pourront reproduire les mêmes expériences sans que rien ne change. Si nous somme dans un avion et que nous renversons un verre d'eau, l'eau tombera de la même manière que si nous étions sur Terre à l'arrêt. Supposons que nous sommes dans une pièce isolée, sans fenêtre ni contact avec l'extérieur, mais avec tous les outils qu'on puisse imaginer pour faire nos expériences physiques. Alors Galilée nous dit qu'il nous est impossible de savoir

1. Où nous sommes
2. Dans quelle direction nous regardons
3. À quelle vitesse nous allons

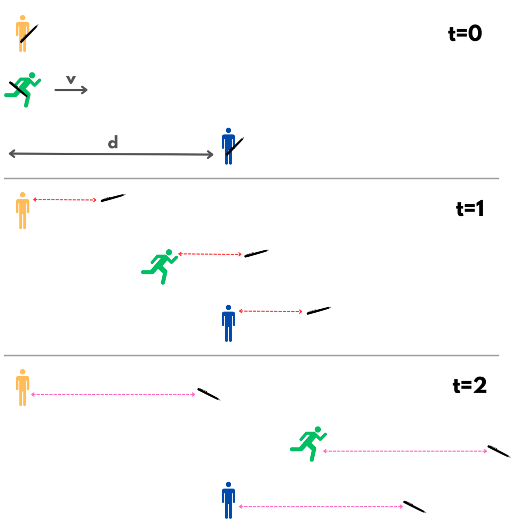

Figure 1 – Lancers de stylos dans différents référentiels

De manière plus concrète, si nous déplaçons l'expérience en même temps que le système de mesure utilisé pour mesurer les résultats de l'expérience, alors les résultats resteront inchangés. Supposons par exemple que l'expérience soit de lancer un stylo et de regarder à quelle distance il atterrit. C'est l'expérience qu'illustre la figure **1**. Une première personne en jaune lance simplement le stylo, depuis le point 0 et sans bouger. Une deuxième personne en vert court à une vitesse v en lançant le stylo. Enfin, une troisième personne en bleu s'avance d'une distance d avant de lancer le stylo.

Du point de vue de la personne en jaune, tous les stylos atterrissent à une distance différente. Il n'y a aucun lien entre les résultats des différentes expériences. Pourtant, chaque personne mesure la même distance entre elle et le stylo. C'est le principe de relativité de Galilée : si nous changeons notre système de mesure, ici l'endroit d'où on mesure le stylo, de la même manière que nous changeons l'expérience, ici la manière dont nous lançons le stylo, alors le résultat ne changera pas.

Dans notre univers en 3 dimensions, un "système de mesure" correspond à un repère (O, x, y, z) : x, y et z donnent les directions des axes, tandis que O donne l'origine, le point 0. Déplacer le système de mesure correspond à changer O, tandis que le tourner correspond à changer les axes x, y, z. Cependant, comme nous pouvons le voir avec la personne en vert dans la figure **1**, la dimension temporelle est aussi importante. Le repère utilisé peut changer avec le temps. Notre "système de mesure" correspond donc à un référentiel $\mathcal{R}(x, y, z, t)$, c'est à dire un ensemble de repères qui peuvent changer avec le temps.

Tout objet[1] possède un référentiel attaché, appelé le référentiel propre. Mon référentiel propre est le référentiel d'où je mesure à partir de moi. Dans mon référentiel propre, je suis toujours à l'arrêt. Je ne bouge jamais, vu que le référentiel bouge avec moi. De même, tout objet comme le stylo que nous avons lancé est immobile dans son référentiel propre. Lorsque l'on fait une expérience, il est donc souvent utile de fixer un référentiel extérieur, qui "ne bouge pas". On appelle souvent ce référentiel le référentiel de l'observateur, en imaginant qu'il y a un observateur assis dans la salle de l'expérience qui ne bouge pas.

Définition 1 : Référentiel inertiel

Un référentiel inertiel, aussi appelé référentiel galiléen, est un référentiel dans lequel les lois de la physique sont les mêmes que celles que l'on connaît. Plus rigoureusement, c'est un référentiel dans lequel un objet isolé, soumis à aucune force, se déplace en ligne droite à vitesse constante.

L'ensemble des référentiels inertiels sont obtenus en bougeant, en tournant d'un angle fixe ou en donnant une vitesse constante à un référentiel inertiel d'origine : c'est la relativité galiléenne. Cependant, tous les référentiels ne sont pas inertiels. Par exemple, un avion au décollage n'est pas un référentiel inertiel, parce qu'il est en train d'accélérer. Le référentiel propre d'un objet est inertiel quand l'objet est libre, quand il n'est affecté par aucune force ou aucune action extérieure. Par exemple, l'avion au décollage se sert de l'air autour pour accélérer, et son référentiel n'est donc pas inertiel. Par contre, en supposant que la Terre est un référentiel inertiel, un avion allant à une vitesse constante a un référentiel propre qui est aussi inertiel : l'avion utilise de l'énergie pour avancer, mais juste assez pour contrer les effets de la friction avec l'air, de sorte à ce qu'au final il ait une vitesse constante.

En pratique, il est impossible d'obtenir un référentiel parfaitement inertiel. La Terre tourne sur elle même et autour du soleil, qui lui-même gravite autour du centre de la galaxie. Mais de manière générale, on suppose quand même que la Terre est un référentiel inertiel, comme tout autre objet se déplaçant à une vitesse constante sur sa surface.

1. En réalité, seules les objets possédants une masse strictement positive ont un référentiel propre. Pour avoir un référentiel propre, il faut évoluer dans le temps, condition qui n'est pas respectée par les objets de masse nulle voir négative, comme nous allons le voir.

La relativité de Galilée nous dit que si changeons le référentiel de l'expérience en un autre référentiel inertiel, mais que nous changeons notre référentiel de la même manière, alors les résultats de l'expérience mesurés dans notre référentiel propre seront les mêmes.

1.2 La vitesse de la lumière

Si l'on prend naïvement la relativité galiléenne, on s'aperçoit vite que la vitesse de la lumière est relative. Après tout, c'est une vitesse comme une autre. Si j'envoie un rayon de lumière dans une direction, je pourrais voir la lumière aller à la vitesse v_0. Mais si quelqu'un d'autre court dans la même direction que la lumière à une vitesse v', alors il verra depuis son référentiel propre la vitesse aller à une vitesse $v_0 - v'$.

Pourtant, au milieu du XIX^e siècle, Maxwell développe la théorie de l'électromagnétisme. Sa théorie explique qu'un champ électrique dépend de la permittivité électrique de son milieu, ϵ_0 dans le vide, et qu'un champ magnétique dépend de la perméabilité magnétique de son milieu, μ_0 dans le vide. Ce sont deux constantes de l'Univers, qui gouvernent une force fondamentale du monde tout comme la gravité. Selon Galilée, ces constantes ne doivent donc pas dépendre du référentiel dans lequel elles sont mesurées.

La théorie de Maxwell explique aussi ce qu'est la lumière : c'est la combinaison d'une onde électrique et d'une onde magnétique, qui se répondent mutuellement et se maintiennent en vie l'une grâce à l'autre. Ainsi, Maxwell prédit que dans le vide, la lumière se déplace à une vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{1}$$

En particulier, c'est une quantité qui ne dépend que de deux constantes, les mêmes dans tout référentiel. Donc la vitesse de la lumière ne doit pas dépendre du référentiel dans lequel on se trouve. Sa valeur est de

$$c = 299\ 792\ 458 \quad \text{m.s}^{-1} \tag{2}$$

C'est d'ailleurs la constante qui définit la taille d'un mètre en fonction de la durée d'une seconde. C'est donc une valeur exacte et non pas une approximation expérimentale. Mais pour simplifier, nous retenons souvent que $c \simeq 3 \times 10^8$ m.s^{-1}.

Dans ce cas, est-ce que la relativité Galiléenne a tort ? La formule de composition des vitesses ne peut qu'être fausse. Il est d'ailleurs assez arbitraire de dire que si un coureur allant à une vitesse v' voit un objet allant dans le même sens que lui à une vitesse v_0, alors il verra l'objet aller à une vitesse $v_0 - v'$. Par contre, le principe même de relativité, le fait que les lois de la physique ne change pas entre référentiels inertiels, peut être gardé. C'est ce simple principe, avec la constance de la vitesse de la lumière, qui va nous en apprendre long sur la structure de l'espace-temps.

2 Quelques expériences de pensée

2.1 De la lumière dans un train

Faisons une expérience de pensée [2]. Imaginons que nous sommes dans un train en mouvement, de vitesse v. Dans le train, nous disposons deux miroirs face à face à une distance d

2. Une expérience de pensée est une expérience qu'on imagine, et qui nous permet de comprendre le monde qui nous entoure sans avoir besoin d'aucun outil. La théorie de la relativité restreinte a été intégralement développée à l'aide d'expériences de pensée.

l'un de l'autre, un au sol et un au plafond. Puis nous envoyons un trait de lumière sur l'un des deux miroirs de sorte à ce que maintenant, la lumière rebondissent infiniment entre les deux. Imaginons aussi que nous avons un ami sur le quai, qui regarde avec nous la lumière rebondir entre les miroirs. Le montage est représenté dans la figure **2**.

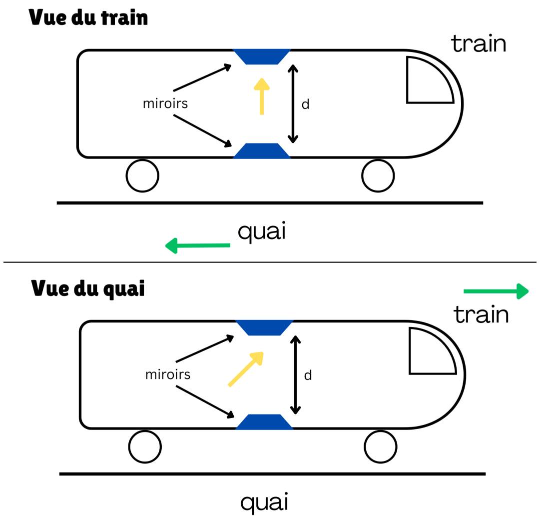

Figure 2 – Expérience des miroirs dans le train

De notre point de vue dans le train, le train semble être à l'arrêt. Pour nous, c'est le quai qui bouge à une vitesse v vers l'arrière. Entre chaque rebond, on voit la lumière parcourir une distance d_0. Sachant que la lumière va à la vitesse c peut importe le référentiel, on voit donc la lumière prendre un temps $\Delta t_0 = d_0/c$ entre chaque rebond. On marque chaque quantité d'un indice 0, pour indiquer que c'est ce qui est perçu dans le référentiel propre du train, où l'expérience a lieu.

Maintenant, intéressons nous à ce qui est perçu par notre ami sur le quai. Lui voit le train bouger et le quai immobile. Ainsi, il voit aussi la lumière avancer, et suivre un zig-zag, comme dessiné figure **3**. Aux yeux de cet observateur, le train avance à une vitesse v. Si l'on écrit $\Delta t'$ le temps que la lumière prend entre chaque rebond, alors les miroirs avancent d'une distance de $\Delta t' v$ entre chaque rebond. Ainsi, par le théorème de Pythagore, la distance que la lumière doit parcourir entre chaque rebond est

$$d' = \sqrt{\Delta t'^2 v^2 + d_0^2} \tag{3}$$

La vitesse de la lumière étant constante, on obtient

$$\Delta t'^2 = (\Delta t'^2 v^2 + d_0^2)/c^2 \tag{4}$$

On note $\beta \triangleq v/c$ le rapport entre la vitesse du train et la vitesse de la lumière, et γ, connu sous le nom du facteur de Lorentz

$$\gamma \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

On reconnaît aussi $\Delta t_0 = d_0/c$, ce qui nous donne

$$\Delta t' = \gamma \Delta t_0 \tag{6}$$

C'est notre première observation des effets de la relativité restreinte ! Comme $\gamma \geq 1$, $\Delta t'$ est plus grand que Δt_0. Si A est en mouvement par rapport à B, alors B verra le temps de A s'écouler plus lentement que A ne le verra lui-même.

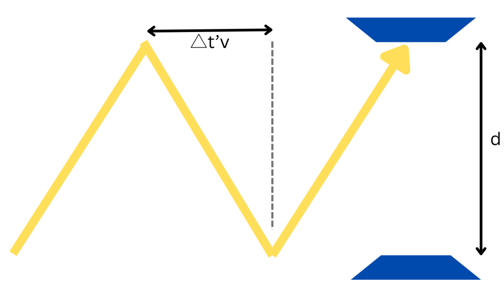

Figure 3 – Mouvement de la lumière du point de vue du quai

Propriété 1 : Dilatation des durées

Supposons deux référentiels, l'un en mouvement de vitesse v par rapport à l'autre. Alors le temps passé entre deux évènements par le référentiel en mouvement est plus long d'un facteur γ, le facteur de Lorentz, s'il est mesuré par l'autre référentiel que si il le mesure lui-même.

Il est intéressant de noter que pour atteindre ce résultat, nous avons supposé que nous et notre ami mesurons la même hauteur entre les deux miroirs, d_0. Cette hypothèse est légitime parce que le mouvement du train est perpendiculaire à la hauteur entre les deux miroirs. Si l'on se restreint juste à l'espace en une dimension qui sépare les deux miroirs, il n'y a aucun mouvement. La mesure doit donc être la même pour nous deux.

La dilatation des durées nous dit que plus on va vite, plus notre temps passe lentement du point de vue des autres et donc plus ils nous voient aller lentement. C'est une des raisons pour lesquelles même si l'on accélère constamment, personne ne nous verra jamais atteindre la vitesse de la lumière.

Prenons maintenant un point de vue neutre. Si deux personnes sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, alors chacune des personnes voit le temps de l'autre passer plus lentement que l'autre ne le perçoit. À première vue, c'est un paradoxe. En réalité, cela exprime le fait que les deux personnes sont dans l'impossibilité de synchroniser leurs horloges sans ralentir ou accélérer : il n'existe plus de notion de simultanéité, le temps est relatif. Nous parlerons plus de ces paradoxes dans quelques sections.

2.2 Autre expérience dans le train

On sait maintenant que le temps passe plus vite pour la personne dans le train que pour la personne sur le quai, avec $\Delta t' = \gamma \Delta t_0$. Supposons maintenant que les deux personnes veulent mesurer la longueur du train. Pour faire cette mesure, elles marquent t_0 l'heure exacte à laquelle l'avant du train atteint le quai, et t_1 l'heure exacte à laquelle l'arrière du train atteint le quai. L'expérience est illustrée par la figure **4**.

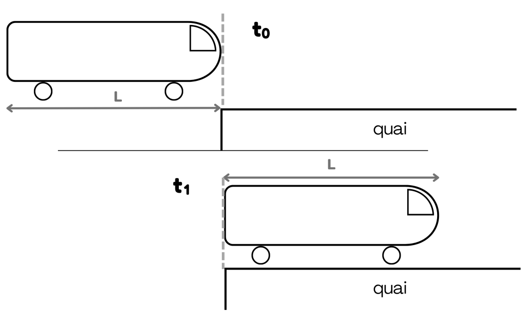

Figure 4 – Expérience pour mesurer la longueur du train

On a noté v la vitesse du train vu du quai. Mais v est en réalité une différence de vitesse entre le train et le quai : du point de vue du train, c'est le quai qui bouge, et nous n'avons en réalité aucun moyen de savoir lequel des deux bouge "vraiment". La notion de mouvement n'existe que relativement à un référentiel. Comme v n'est qu'une différence de vitesse, une quantité relative, il n'y a aucune raison pour que cette quantité mesurée depuis le train soit différente. C'est donc aussi la vitesse du quai vu du train. En notant Δt_0 le temps mesuré depuis le train entre t_0 et t_1, la personne dans le train obtient une longueur de train

$$L_0 = v\Delta t_0 \tag{7}$$

De la même manière, la personne sur le quai mesure un temps $\Delta t'$ entre les deux instants, et obtient

$$L' = v\Delta t' \tag{8}$$

On peut utiliser (6) pour lier $\Delta t'$ et Δt_0. Cependant, il faut faire un peu attention aux mesures effectuées et aux référentiels utilisés. Cette fois-ci, nous nous servons d'un point fixe dans le référentiel du quai pour mesurer le temps qui passe. Autrement dit, l'expérience est conçue du point de vue du quai. Si l'on changeait de référentiel pour voir cette expérience du point de vue du train, l'expérience serait un peu différente. Comme le référentiel "par défaut" de cette mesure de temps est le référentiel du quai, on a $\Delta t_0 = \gamma \Delta t'$. On obtient alors

$$\boxed{L' = \frac{L_0}{\gamma}} \tag{9}$$

On voit que la personne sur le quai voit le train plus court que la personne dans le train. Plus généralement, si A est en mouvement par rapport à B, alors B verra les longueurs de A plus courtes que A ne les verra lui-même. Autrement dit, lorsque l'on est en mouvement par rapport à une autre personne immobile, on voit les longueurs des objets restés immobiles comme plus courtes.

Propriété 2 : Contraction des longueurs

Supposons deux référentiels, l'un en mouvement de vitesse v par rapport à l'autre. Alors les longueurs dans le référentiel en mouvement sont plus courtes si elles sont mesurées dans l'autre référentiel que si elles sont mesurées dans leur référentiel propre, d'un facteur $1/\gamma$.

Encore une fois, on voit que l'Univers se déforme pour nous empêcher d'atteindre la vitesse de la lumière : plus on va vite, plus les distances que l'on parcourt sur le monde resté immobile sont mesurées comme petites et donc plus on a l'impression d'aller lentement.

Avec cette expérience, on voit aussi qu'il est parfois délicat de savoir qui est en mouvement par rapport à qui, dans quel référentiel les mesures sont faites, et dans quel sens appliquer les formules. Au cours de la section suivante, nous allons explorer la relativité restreinte d'une manière plus moderne et plus claire, pour lever tout doute.

3 L'espace-temps

3.1 Système de coordonnées

Comme la relativité restreinte lie l'espace avec le temps, par exemple en changeant notre perception des distances en fonction d'un changement de vitesse, il est nécessaire de regarder l'espace et le temps ensemble. En mécanique classique, on regarde les coordonnées (x, y, z) d'un objet dans un espace en 3 dimensions en fonction du temps t. Par exemple, si on lance un stylo en l'air, on s'intéresse à une fonction comme $z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, où z représente la hauteur du stylo, comme illustré par la partie gauche de la figure **5**. Mais si on prend en compte la relativité restreinte, ce genre d'expression perd tout son sens parce que la notion même de temps dépend du référentiel. On préférerait donc regarder les coordonnées (t, x, y, z) d'un objet dans l'espace-temps en 4 dimensions, en fonction d'un paramètre s. Dans le cas d'un stylo lancé en l'air on, ne s'intéresserait alors plus à une fonction $z(t)$ mais à deux fonctions $z(s)$ et $t(s)$, comme illustré par la partie droite de la figure **5**.

Le problème de s'intéresser à (t, x, y, z) est que ces coordonnées ne sont pas homogènes dans leurs dimensions. t à une dimension temporelle, alors que les autres ont une dimension spatiale. Pour lier les deux ensemble, il faut introduire une constante en $[m.s^{-1}]$ ou en $[s.m^{-1}]$, donc une vitesse ou son inverse. La seule vitesse que l'on connaît qui soit une constante de l'Univers est c. On considère donc les coordonnées (ct, x, y, z). On pourrait tout aussi bien considérer $(t, x/c, y/c, z/c)$, mais c'est plus ennuyant à écrire. Lorsque l'on fait de la physique relativiste à plus haut niveau, on considère souvent $c = 1$, que l'on obtient en passant des mètres et des secondes à d'autres unités, appellées unités naturelles. De cette façon, on peut à nouveau considérer les coordonnées (t, x, y, z), cette fois ci dimensionnellement homogènes. On peut ensuite retrouver les valeurs usuelles par analyse dimensionnelle.

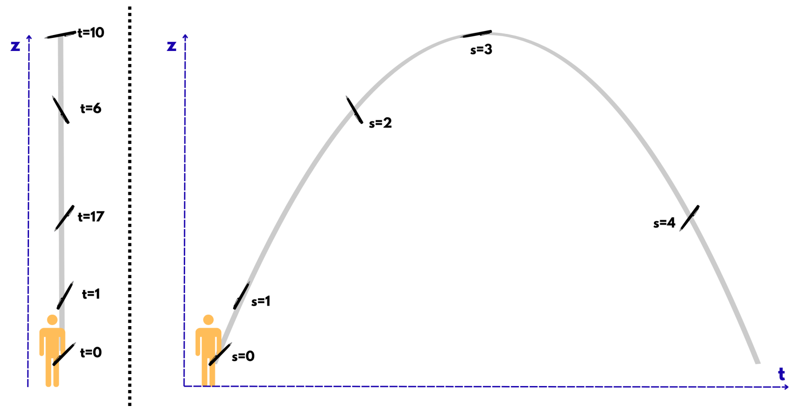

Figure 5 – Trajectoire d'un stylo en fonction du temps t ou d'un autre paramètre s

Définition 2 : Quadrivecteur position

Un ensemble de coordonnées physiques[a] dans l'espace-temps s'appelle un quadrivecteur. (ct, x, y, z) est le quadrivecteur position, et indique la position d'un objet dans l'espace-temps, mesuré dans un certain référentiel.

a. par physiques, nous entendons qui se transforme de la même manière que le quadrivecteur position sous les transformations du groupe de Lorentz, décrites dans la sous-section suivante.

Il est parfois ennuyant d'écrire (ct, x, y, z) pour nommer explicitement les différents composants d'un quadrivecteur. Dans le cas de coordonnées en 3 dimensions, il est courant de noter $\vec{p}$ la position ou $\vec{v}$ la vitesse. On note alors les composants $\vec{p} = (\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z)$ ou $\vec{v} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$. Il est alors facile d'étendre cette notation en notant par exemple P le quadrivecteur position, et (P_{ct}, P_x, P_y, P_z) ses composants. De manière plus moderne, nous avons tendance à ne pas nommer les axes x, y, z explicitement, car ils peuvent facilement induire en erreur. Nous pouvons simplement appeler ces axes $1, 2, 3$, et dénommer l'axe temporel 0. Nous notons alors le quadrivecteur position X^i avec i une variable allant de 0 à 3. X^0 dénote la position dans le temps, tandis que (X^1, X^2, X^3) dénote la position dans l'espace. Cependant, nous allons garder autant que possible la notation (ct, x, y, z) au fil de ce cours pour être le plus clair possible.

Retournons maintenant à l'évolution d'un objet. En évoluant avec le paramètre s, le quadrivecteur position forme un chemin dans l'espace-temps, comme dessiné sur la figure **5**. On appelle ce chemin la trajectoire de l'objet dans l'espace-temps. Il est important de noter que s ne sert qu'à tracer la trajectoire de l'objet dans l'espace-temps, et n'a aucun sens physique. Par exemple, si on lance le même stylo en l'air que tout à l'heure, on peut avoir $z(s) = z_0 + 2v_0 s - 2gt^2$ et $ct(s) = 2cs$. La fonction $z(s)$ est un peu différente de celle que nous avions précédemment. Mais en remarquant que $t = 2s$, on voit que c'est en fait la même chose en fonction du temps.

Définition 3 : Masse au repos

Un objet, ou plus concrètement une masse[a], est dit au repos dans un référentiel donné si il ou elle est immobile. Autrement dit, un objet est au repos si sa trajectoire évolue le long du temps et reste constante dans l'espace.

a. Comme nous allons le voir, un objet sans masse ou avec une masse négative ne peut pas être au repos.

On peut noter qu'un objet est toujours au repos dans son référentiel propre.

3.2 Les transformations de Lorentz

Avec ce système de coordonnées, nous sommes prêts à retourner à la relativité galiléenne. La relativité galiléenne dit que si l'on bouge d'une distance fixe, qu'on tourne d'un angle fixe ou qu'on prend une vitesse constante, les lois de la physique restent les mêmes. Regardons comment ces changements de référentiels affectent le quadrivecteur position.

Tourner le référentiel est une opération connue sous le nom de rotation. Une rotation dépend de deux paramètres : l'axe de rotation O_r et l'angle de rotation θ. L'axe de rotation peut être n'importe quelle direction spatiale, mais n'importe quelle rotation peut être exprimée comme une succession de rotations autours des axes O_x, O_y et O_z. Pour cette raison, nous allons seulement définir la rotation $R_x(\theta)$ autours de l'axe O_x, la rotation $R_y(\theta)$ autours de l'axe O_y, et la rotation $R_z(\theta)$ autours de l'axe O_z. Étant donné un quadrivecteur position (ct, x, y, z), nous avons[3]

$$R_x(\theta)\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y\cos(\theta) - z\sin(\theta) \\ y\sin(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$R_y(\theta)\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x\cos(\theta) + z\sin(\theta) \\ y \\ -x\sin(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$R_z(\theta)\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix} \tag{12}$$

Une deuxième opération permettant de passer d'un référentiel inertiel à un autre est le changement de vitesse, dénommée la boutée[4] en français, mais plus souvent appelé le boost par anglicisme ou parfois la "transformation spéciale de Lorentz". Le boost $B_{\vec{v}}$ est paramétrisée par un vecteur spatial $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, la vitesse que l'on ajoute au référentiel. Mais un boost de $\vec{v}$ n'est que la succession d'un boost de $v_y\vec{y} = (0, v_y, 0)$, d'un boost de $v_x\vec{x} = (v_x, 0, 0)$ et d'un boost de $v_z\vec{z} = (0, 0, v_z)$. Pour cette raison, nous allons seulement définir les boosts $B_{v\vec{x}}$, $B_{v\vec{y}}$ et $B_{v\vec{z}}$ pour n'importe quel vitesse v. En utilisant la dilatation des durées et la contraction des

3. Nous notons ici les quadrivecteurs sous forme de colonne, autant pour la lisibilité que pour respecter les conventions d'algèbre linéaire.

4. Terme ancien remis au goût du jour dans le contexte de la relativité par Thibault Damour. Historiquement, c'est ce terme qui donne aujourd'hui des expressions comme bout-en-train.

longueurs obtenues précédemment, on peut voir que le quadrivecteur position (ct, x, y, z) se transforme comme

$$B_{v\vec{x}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(ct-\beta x) \\ \gamma(x-\beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B_{v\vec{y}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(ct-\beta y) \\ x \\ \gamma(y-\beta ct) \\ z \end{pmatrix}, \qquad B_{v\vec{z}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(ct-\beta z) \\ x \\ y \\ \gamma(z-\beta ct) \end{pmatrix} \tag{13}$$

où $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ sont les mêmes que dans l'équation (6).

Ensemble, les rotations et les boosts forment le groupe de Lorentz, et sont appelées transformations de Lorentz. C'est l'ensemble des transformations que l'on peut faire sans changer les lois de la physique et sans changer l'origine, le quadrivecteur $(0, 0, 0, 0)$.

Enfin, la dernière opération autorisée par la relativité galiléenne est celle qui bouge le référentiel, appelée translation. Une translation T_α est paramétrisée par un autre quadrivecteur $\vec{\alpha} = (\alpha_{ct}, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. Elle agit sur un quadrivecteur (ct, x, y, z) par

$$T_\alpha \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct+\alpha_{ct} \\ x+\alpha_x \\ y+\alpha_y \\ z+\alpha_z \end{pmatrix} \tag{14}$$

Combiner une translation avec une transformation du groupe de Lorentz, donc une somme de boosts et de rotations, forme une transformation du groupe de Poincaré. Avec ces transformations, il est toujours possible d'aller d'un référentiel inertiel à un autre, et on peut donc toujours ramener tout un problème dans un seul référentiel pour ne pas se tromper de mesures.

3.3 Notre Univers

En voyant toutes les différentes manières de transformer les coordonnées, on peut se demander si il reste quelque chose de stable, qui ne change pas avec les transformations de Lorentz ou les translations. Il se trouve que pour un quadrivecteur (ct, x, y, z), la quantité

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{15}$$

ne change jamais. On peut appliquer ça pour trouver une quantité invariantes entre deux points de l'espace-temps.

Définition 4 : Intervalle de Lorentz

Étant donné deux coordonnées dans l'espace-temps (ct, x, y, z) et (ct', x', y', z'), l'intervalle de Lorentz Δs est définie par

$$\Delta s^2 \triangleq c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2 \tag{16}$$

L'intervalle de Lorentz est la même dans tous les référentiels inertiels.

On peut comprendre la quantité s associée à un quadrivecteur comme une sorte de longueur de ce quadrivecteur, appelée norme du quadrivecteur, et l'intervalle de Lorentz entre deux points de l'espace-temps comme une sorte de distance entre ces deux points. Ce n'est pas une vraie notion de distance, puisque l'intervalle de Lorentz entre deux points de l'espace-temps peut être négative, et puisque le fait que deux points soient à une distance 0 l'un de l'autre ne veut pas dire qu'ils sont au même endroit. Malgré tout, nous pouvons définir une notion de géométrie dans l'espace-temps grâce à cette espèce de distance. Cet espace-temps où la distance est donné par l'intervalle de Lorentz est appelé l'espace de Minkowski.

Par définition, les transformations du groupe de Poincaré sont des isométries de cet espace, c'est à dire qu'elles ne changent pas les distances. On peut les comprendre comme des symétries de l'espace, une manière de définir l'homogénéité de l'espace. Ce sont d'ailleurs les seules isométries de l'espace.

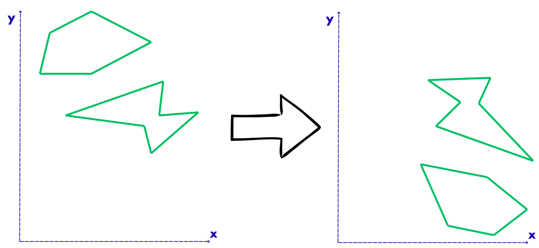

Figure 6 – Exemple d'isométrie en 2 dimensions

Comparons à l'univers dont nous avons l'habitude. Dans notre espace usuel, les seules isométries qui existent sont les rotations et les translations. Une isométrie générale en 2 dimensions est représentée dans la figure **6**. Le fait que les translations soient des isométries signifie que l'espace est en tout point le même, tandis que le fait que les rotations soient des isométries signifie que l'espace est isotrope, qu'il n'existe pas de différence entre les différentes directions. Dans un espace de 3 dimensions homogène et isotrope, il est naturel de s'attendre à ce que tout fonctionne pareil si on bouge ou on tourne, car cela ne change pas l'Univers. De même, en partant du principe que nous vivons dans l'Univers de Minkowski, il est naturel de s'attendre à ce que les transformations de Lorentz et les translations ne changent pas la physique : ce sont les symétries de l'Univers.

Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'un espace (ou espace-temps) de dimension n peut au maximum avoir $n(n+1)/2$ symétries indépendantes. En 4 dimensions, pour les 4 dimensions de l'espace-temps, il peut y avoir au maximum 10 symétries indépendantes. Les transformations du groupe de Poincaré sont au nombre de 4 pour les translations, 3 pour les boosts, et 3 pour les rotations ! Cela fait 10, indiquant que l'espace de Minkowski possède le nombre de symétries maximum et qu'il est impossible d'en avoir plus [5]. Nous n'en avons pas oublié.

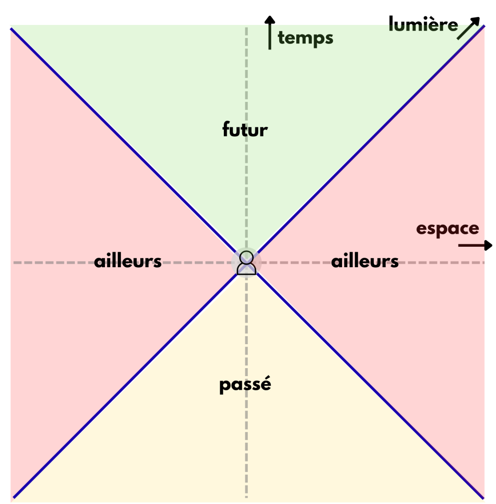

Figure 7 – Diagramme de l'espace de Minkowski

Supposons que nous sommes à un point de l'espace de Minkowski. Alors nous pouvons classifier les autres points de l'espace en 3 catégories. Soit ils sont à une distance 0 de nous, soit ils sont à une distance positive de nous, soit ils sont à une distance négative de nous. Comme changer de référentiel ne change pas les distances, ces catégories sont valides peu importe l'observateur. Ce sont des vérités universelles. La figure **7** montre à quoi ressemble l'Univers de Minkowski divisé en ces 3 catégories. En rouge sont les points à une distance négative de nous, en bleu sont les points à une distance nulle de nous. Les points à une distance positive de nous sont encore divisés

5. A moins de passer à un super-espace, qui amène à la supersymétrie

en 2 catégories : en vert ceux qui ont un temps plus grand que nous, et en jaune ceux qui ont un temps plus petit que nous. Puisque la notion d'intervalle de Lorentz est constante à travers les changements de référentiels, il en va de même de leurs signes : les catégories que nous venons de définir sont universelles et ne dépendent pas du point de vue.

Supposons que nous voulions atteindre un objet situé sur un point à une distance 0 de nous. Alors le vecteur qui nous sépare prend la forme (ct, x, y, z), tel que

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{17}$$

Pour atteindre ce point, il faudrait aller à une vitesse $v = d/t$, avec $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ par le théorème de Pythagore. Mais on a alors $v = c$, il faut aller à la vitesse de la lumière pour atteindre ces points. Les quadrivecteurs de norme nulle sont appelés vecteurs de genre lumière, parce que seule la lumière peut se déplacer dans cette direction. Sur la figure **7**, les points en bleu sont donc tous les points atteints par une lumière partant de nous et allant en ligne droite.

Définition 5 : Cône lumière

Les vecteurs de genre lumière forment un cône, appelé le cône lumière. Ceux qui se situent dans le futur, avec un temps positif, forment le cône de lumière futur. Ce sont les points que la lumière pourra atteindre dans le futur en partant de 0. Les vecteurs de genre lumière avec un temps négatif forment quant à eux le cône de lumière passé.

Si il faut aller à la vitesse de la lumière pour atteindre les points bleus, alors il faut aller encore plus vite pour atteindre les points rouges, qui constituent "l'ailleurs". Ce sont les points qui nous sont inaccessibles, auxquels nous ne sommes jamais allés et auxquels nous ne pourrons jamais allés. Une trop grande distance spatiale nous sépare, raison pour laquelle les quadrivecteurs de norme négative sont appelés vecteurs de genre espace. Ces quadrivecteurs nous indiquent dans quelle direction est le reste de l'espace, ce qui peut être utile par exemple aux confins d'un trou noir.

Enfin, les points en vert et jaunes sont les points qui peuvent avoir un lien causal avec nous. Les points en vert ont un plus grand temps que nous, ce sont les points que nous pouvons atteindre dans le futur et que nous pouvons influencer. Ils forment notre "futur". Réciproquement, les points en jaune sont ceux d'où nous pouvons venir, qui ont pu nous influencer par le passé. Ils forment notre "passé". Ces vecteurs sont appelés des vecteurs de genre temps. Il est important de noter que la notion de passé et de futur ne fait sens qu'à l'intérieur des cônes lumières. Dans l'ailleurs, la notion de passé ou de futur dépend du référentiel choisi.

Le fait que ces catégories soient universelles, peu importe le référentiel, signifie que la causalité ne peut pas être brisée. Un point inaccessible restera toujours un point inaccessible, peu importe le point de vue, tandis qu'un point avec un lien causal pourra toujours avoir un lien causal, peu importe le point de vue. Enfin, les vecteurs de genre lumière restent toujours de genre lumière, montrant que la vitesse de la lumière est constante.

3.4 Temps et paradoxes

Supposons que nous sommes à un point $p_1 = (ct, x, y, z)$ de l'espace de Minkowski, et que nous évoluons vers un autre point $p_2 = (ct', x', y', z')$. À l'aide d'une translation, on peut amener p_1 à $(0, 0, 0, 0)$ puis à l'aide d'un boost, on peut amener p_2 à $(c\tau, 0, 0, 0)$. Autrement dit, nous pouvons changer de référentiel pour nous placer dans notre référentiel propre, dans lequel nous ne bougeons pas et ne faisons qu'évoluer dans le temps. τ est alors le temps qu'il nous faut pour aller de p_1 à p_2, dans notre référentiel propre. Puisque l'intervalle de Lorentz entre les deux points n'a pas changé, on a $\Delta s = c\tau$. La distance entre deux points est proportionnelle au temps propre passé pour aller de l'un à l'autre.

De ce point de vue, nous pouvons réinterpréter l'espace de Minkowski. Les points qui sont séparés de nous par un vecteur de genre temps sont des points que nous pouvons atteindre en avançant dans le temps, ou qui peuvent nous atteindre en avançant dans le temps. C'est pour ça qu'ils sont liés à nous causalement. Si nous voulions atteindre la vitesse de la lumière et atteindre un point séparé de nous par un vecteur de genre lumière, alors il nous faudrait arrêter notre temps. C'est impossible, et c'est pour ça que la vitesse de la lumière est inatteignable. Pire encore, si nous voulions atteindre un point séparé de nous par un vecteur de genre espace, alors il nous faudrait remonter notre temps.

Maintenant que nous savons lire le temps propre dans l'espace de Minkowski, nous pouvons essayer de mieux comprendre ce que dit la relativité restreinte, et la dilatation du temps. Dans la représentation de l'espace de la figure **7**, une translation signifie un déplacement sur le diagramme, tandis qu'une rotation est invisible car l'espace n'est représenté que dans une seule direction. Un boost, quant à lui, penche le temps propre et l'espace propre du référentiel.

Supposons par exemple que nous avons une personne A en vert et une personne B en rouge. Plaçons nous dans le référentiel propre de A, et supposons que B se déplace à une certaine vitesse par rapport à A. Dans son référentiel propre, B se déplace le long du temps, et croit ne pas bouger. Mais du point de vue de A, B a une vitesse et donc se déplace avec le temps, ce qui résulte visuellement en un temps penché. C'est ce qui est représenté dans la figure **8**, où le diagramme est dessiné avec A et B au même instant selon A.

On peut déjà remarquer que A et B ont beau être représentés au même instant selon A, A est dans le passé de B selon B. C'est un effet de la relativité du temps, et cela signifie que la notion de simultanéité est perdue avec la relativité restreinte. Seule la notion de causalité passée ou future reste. Ici, A et B sont séparés par un vecteur de genre espace, et ne sont donc pas liés causalement.

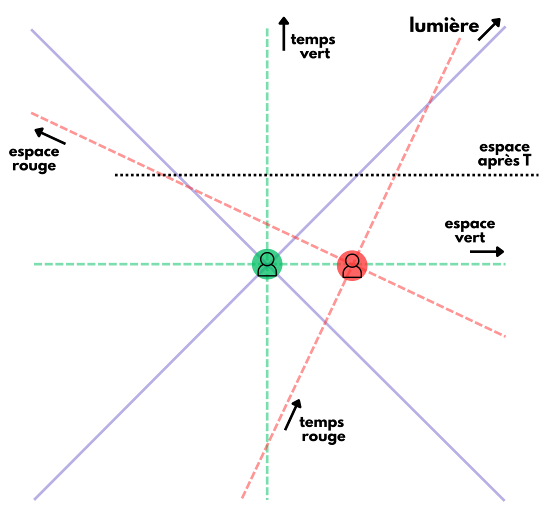

Figure 8 – Représentation d'un référentiel boosté vu depuis un autre

Alors pourquoi est-ce que le temps parait plus long pour A que pour B ? Pour voir cela, supposons que A et B avance un peu le long de leurs temps propres, c'est à dire qu'ils continuent librement leur mouvement respectif sans force extérieure. Puis supposons qu'après un temps T mesuré par A, on arrête à nouveau le temps pour regarder ce qu'il s'est passé. Le nouvel espace perçu par A est représenté en pointillés noirs sur la figure **8**. A est maintenant à l'intersection entre son temps propre, dessiné en tirets verts, et le nouvel espace qu'il perçoit. Il s'est déplacé de T le long du temps, et a mesuré un temps T. B quant à lui est maintenant à l'intersection entre son temps propre, dessiné en tirets rouges, et le nouvel espace. Comme son axe du temps est penché du point de vue de A, on peut voir que l'intervalle de Lorentz entre sa nouvelle position et son ancienne position est plus petite que A. De manière générale, on peut voir dans l'équation (15) que plus un trait est penché dans le diagramme, plus sa norme est petite. C'est la dilatation du temps

Un paradoxe connu de la relativité restreinte est le paradoxe des jumeaux : imaginons deux jumeaux, nés en même temps sur Terre. L'un, dont la trajectoire est représentée en vert sur la figure **9**, reste sur Terre. L'autre, dont la trajectoire est représentée en rouge, pars explorer l'espace avant de faire demi-tour pour revenir sur Terre. Si l'on se place sur le référentiel de la Terre, on peut imaginer que le jumeau dans la navette spatiale va très vite et ressent donc moins de temps passer que son jumeau sur Terre. Quand le jumeau dans l'espace revient sur Terre, il devrait donc être beaucoup plus jeune que son jumeau resté sur Terre. C'est ce qu'on voit sur la partie haute de la figure **9**. La trajectoire rouge parcourt une distance beaucoup plus petite que la trajectoire verte, avec les distances de l'espace de Minkowski.

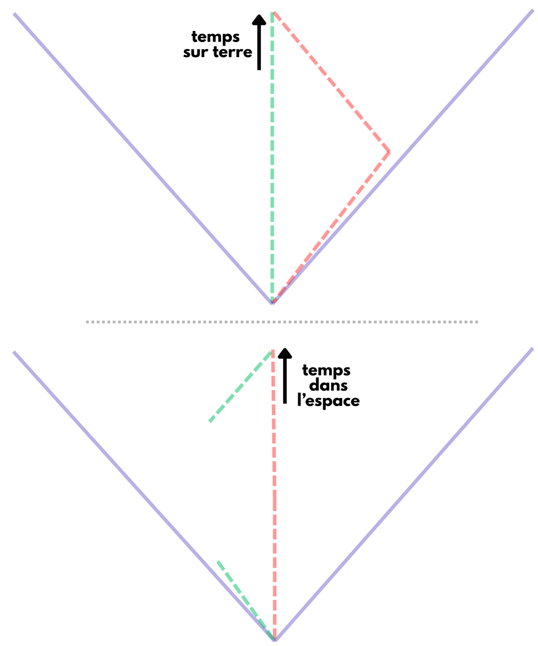

Figure 9 – Représentation du paradoxe des jumeaux

Pourtant, si on se place dans le référentiel du jumeau qui part dans l'espace, on pourrait imaginer la même chose. De son point de vue, le jumeau sur Terre part explorer l'espace avec la Terre, tandis que la navette spatiale reste immobile. De ce point de vue là, c'est le jumeau parti dans l'espace qui devrait être plus vieux une fois de retour sur Terre. Alors, où est le problème ? Si on essaye de changer le référentiel de la partie haute de la figure **9**, on obtient la figure dessinée en dessous. En fait, si on veut se placer dans le référentiel de la navette spatiale, un problème se passe au moment où elle fait demi-tour. Sur la figure, on voit que la trajectoire verte se brise en deux. C'est parce que en réalité, il est impossible de changer de vitesse instantanément comme ça. Changer de vitesse change la notion du temps, donc changer instantanément de vitesse brise la ligne du temps. Pour faire demi-tour, il faut passer par une phase d'accélération, qui rend le référentiel propre de la navette non-inertiel. C'est à ce moment que se passe la physique intéressante, et que la symétrie entre les deux jumeaux est brisée.

Finalement, c'est bien le jumeau resté sur terre qui vieillira le plus vite. C'est la conséquence d'un fait plus général : le chemin le plus long entre deux points dans l'espace de Minkowski est la ligne droite entre les deux. Aller d'un point A à un point B en suivant une ligne droite, à vitesse constante, sans jamais accélérer ou décélérer, est le moyen le plus long de faire ce trajet. Toute personne déviant du chemin en ligne droite et à vitesse constante arrivera à B plus jeune que les personnes ayant suivi ce chemin.

4 Dynamique relativiste

4.1 Le quadrivecteur vitesse

Jusque là, nous n'avons vu qu'un seul type de quadrivecteur : le quadrivecteur position. Ce quadrivecteur est pratique pour étudier et comparer des trajectoires dans l'espace-temps, mais il n'est souvent pas suffisant pour faire de la mécanique. Pour pouvoir avoir une chance de faire de la mécanique Newtonienne, il nous fait définir une notion de vitesse dans l'espace-temps de Minkowski. La vitesse est la dérivée de la position par le temps. Mais si le temps est une notion relative au référentiel, on a aucune chance que le quadrivecteur vitesse obtenu se transforme toujours d'une jolie manière avec les transformations de Lorentz. La solution est de dériver par rapport au temps propre.

On rappelle de l'équation (6) que si on voit un objet bouger alors à une vitesse v, alors son temps propre est $1/\gamma$ fois plus petit que le notre. Autrement dit, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$. Donc si on veut calculer la vitesse d'un objet dans son temps propre, de vitesse $v = (v_x, v_y, v_z)$ dans notre référentiel, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ct, x, y, z) = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct, x, y, z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{18}$$

Définition 6 : Quadrivecteur vitesse

Le quadrivecteur vitesse d'un objet se déplaçant à la vitesse $v = (v_x, v_y, v_z)$ est $(\gamma c,\ \gamma v_x,\ \gamma v_y,\ \gamma v_z)$.

À basse vitesse, $\beta = \frac{v}{c}$ est proche de 0 donc le facteur de Lorentz γ est proche de 1. Dans ce cas, on retrouve l'expression usuelle de la vitesse. À basse vitesse, la composante temporelle du quadrivecteur est juste constante égale à c : c'est la vitesse à laquelle on se déplace dans le temps. Si on calcule la norme du quadrivecteur vitesse, on obtient

$$s^2 = \gamma^2(c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 \tag{19}$$

En fait, c n'est pas juste la vitesse de la lumière : c'est la vitesse constante à laquelle toute chose se déplace dans l'espace-temps. Nous, humains, nous déplaçons lentement dans l'espace, et donc à une vitesse proche de c dans le temps. La lumière, quant à elle, ne se déplace pas du tout dans le temps. Elle doit donc se déplacer à la vitesse c dans l'espace.

Sous une translation, le quadrivecteur vitesse ne change pas. Mais sous une transformation de Lorentz, le quadrivecteur vitesse se transforme comme le quadrivecteur position. Sous les rotations $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ et $R_z(\theta)$, le quadrivecteur vitesse $(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$ se transforme comme

$$R_x(\theta)\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}c\\ v_x\\ v_y\cos(\theta) - v_z\sin(\theta)\\ v_y\sin(\theta) + v_z\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$R_y(\theta)\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}c\\ v_x\cos(\theta) + v_z\sin(\theta)\\ v_y\\ -v_x\sin(\theta) + v_z\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$R_z(\theta)\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}c\\ v_x\cos(\theta) - v_y\sin(\theta)\\ v_x\sin(\theta) + v_y\cos(\theta)\\ v_z\end{pmatrix} \tag{22}$$

Sous les boosts $B_{v'\vec{x}}$, $B_{v'\vec{y}}$ et $B_{v'\vec{z}}$, en notant $\beta' = v'/c$ et $\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'}$, il se transforme comme

$$B_{v'\vec{x}}\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma'\gamma\,(c-\beta' v_x)\\ \gamma'\gamma(v_x-\beta' c)\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix},\quad B_{v'\vec{y}}\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma'\gamma\,(c-\beta' v_y)\\ \gamma v_x\\ \gamma'\gamma(v_y-\beta' c)\\ \gamma v_z\end{pmatrix},\quad B_{v'\vec{z}}\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma'\gamma\,(c-\beta' v_z)\\ \gamma v_x\\ \gamma v_y\\ \gamma'\gamma(v_z-\beta' c)\end{pmatrix} \tag{23}$$

Il est intéressant de remarquer que lorsque l'objet et le référentiel ne bougent pas trop vite, donc pour γ et γ' proches de 1, on retrouve immédiatement la formule de composition des vitesses donnée par la relativité galiléenne, décrite dans la section 1.2.

4.2 Du mouvement dans le mouvement

En exploitant l'équation (23), il est possible de composer les vitesses en relativité restreinte, et même de corriger la formule de l'effet Doppler. Les formules qui en sortent ne sont cependant pas aussi jolies que ce qu'on a vu jusque là, et le calcul de l'effet Doppler relativiste demande de connaître l'effet Doppler. Pour cette raison, le contenu de cette sous-section est plus orienté pour les élèves de prépa, et n'est pas au programme des IPhOs pour les lycéens.

Supposons que nous avons un objet se déplaçant à une vitesse v dans un référentiel en mouvement par rapport à nous, de vitesse u. Pour passer du référentiel en mouvement au notre, il faut booster le référentiel de $-u$. Par (23), on a la transformation

$$\gamma_v v \to \gamma_v \gamma_{-u}(v - \beta_{-u} c) = \gamma_{v'} v' \tag{24}$$

où v' est la vitesse de l'objet mesurée dans notre référentiel. En développant les β et γ dans l'égalité à droite et en passant au carré, on obtient

$$\frac{v'^2}{1-\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{(v+u)^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u^2}{c^2})} \tag{25}$$

En divisant par c^2 de chaque côté et par c^2 le nominateur et le dénominateur de la partie de droite, puis en multipliant de chaque côté par $(c^2 - v^2)$ et en regroupant les termes en v'^2, on a

$$v'^2\left(1 + \frac{c^2(v+u)^2}{(c^2-v^2)(c^2-u^2)}\right) = \frac{c^4(v+u)^2}{(c^2-v^2)(c^2-u^2)} \tag{26}$$

Puis en isolant v'^2, en simplifiant la fraction et en repassant à la racine, on obtient finalement

$$\boxed{v' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}} \tag{27}$$

C'est la formule de composition des vitesses.

Qu'en est-il de l'effet Doppler ? Supposons qu'une source émettent un signal à une fréquence f_0, donc de longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. On veut savoir quelle est la fréquence perçue par un observateur s'éloignant à une vitesse v de la source, comme représenté sur la figure **10**. On se place dans le référentiel de la source.

On commence par chercher le temps qui s'écoule entre deux moments où l'observateur reçoit un signal. Au moment où l'observateur reçoit un signal, le suivant est à une distance λ_0

derrière. Si on commence un chrono à ce moment et qu'on mesure la distance parcourue par chacun, l'observateur parcourt une distance vt tandis que le signal derrière parcourt une distance ct. Vu que le signal derrière doit parcourir une distance de λ_0 de plus que l'observateur pour le rattraper, on cherche l'instant t_0 tel que

$$vt_0 = ct_0 - \lambda_0 \tag{28}$$

Figure 10 – Situation pour l'effet Doppler

Nous obtenons

$$t_0 = \frac{\lambda_0}{c-v} = \frac{c}{(c-v)f_0} = \frac{1}{(1-\beta)f_0} \tag{29}$$

Mais l'observateur va à une vitesse v, donc le temps qu'il perçoit t' est dilaté d'un facteur de Lorentz inverse. $t' = t_0/\gamma$. En notant $f' = 1/t'$ la fréquence perçue par l'observateur et en remarquant que $(1-\beta^2) = (1-\beta)(1+\beta)$, nous obtenons

$$f' = \gamma(1-\beta)f_0 = \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1+\beta}}f_0 = \boxed{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f_0} \tag{30}$$

Cette dernière expression est la formule de l'effet Doppler relativiste.

4.3 Masse et énergie

Maintenant qu'on a vu étudié la version relativiste de la vitesse, on souhaite s'attaquer à la version relativiste de l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$, parfois appelée quantité de mouvement. On définit le quadrivecteur impulsion comme m fois le quadrivecteur vitesse. Pour les composantes spatiales, on obtient $(\gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_) = \gamma\vec{p}$. L'impulsion relativiste n'est rien de plus que l'impulsion classique multipliée par γ, comme pour la vitesse. De l'autre côté, la composante temporelle est γmc. C'est l'impulsion de l'objet dans le temps. C'est en fait son énergie divisée par c, $E = \gamma mc^2$.

Définition 7 : Quadrivecteur impulsion

Le quadrivecteur impulsion, aussi appelé quadrivecteur énergie-impulsion ou quadrivecteur moment, d'un objet d'énergie E et d'impulsion non-relativiste $\vec{p} = m\vec{v}$ est $(E/c, \gamma p_x, \gamma p_y, \gamma p_z)$.

Le quadrivecteur impulsion se transforme tout comme le quadrivecteur vitesse. La norme du quadrivecteur impulsion est constant pour chaque objet, et ne dépend pas du référentiel : c'est mc. Dans la physique moderne, c'est de cette manière que nous définissons la masse. La masse d'un objet est la norme de son quadrivecteur impulsion divisée par c.

Comme l'énergie d'un objet est son impulsion dans le temps, elle dépend du référentiel de l'observateur. On obtient grâce à ce quadrivecteur une manière générale pour calculer l'énergie d'un objet

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2} \tag{31}$$

où ici p est l'impulsion relativiste, égale à γmv. Dans le contexte des théories modernes quantiques, cette équation s'appelle l'équation de Klein-Gordon, et c'est cette équation qui est utilisée pour comprendre le mouvement d'une certaine classe de particules appelés bosons, dont le photon fait partie.

De cette équation, on voit que l'énergie d'un objet peut provenir de deux choses : sa masse et sa vitesse. Un objet qui n'a pas de masse, comme un photon, est obligé d'avoir toute son énergie dans la vitesse. C'est pour ça que ces objets vont à la vitesse de la lumière. En réalité, la lumière n'est pas la seule à aller à cette vitesse. C'est le cas de tout objet sans masse. D'un autre côté, n'importe quel objet ayant une masse ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière.

On peut appliquer l'équation (31) à un objet dans son référentiel propre, ou pour un objet que l'on voit à l'arrêt, au repos. On obtient la fameuse équation d'Einstein

$$E = mc^2 \tag{32}$$

On peut aussi calculer l'impulsion d'un photon, chose habituellement impossible dû à sa masse nulle. Comme un photon a une masse nulle, la norme de son quadrivecteur est nulle aussi. On a alors $E = pc$. Mais l'énergie d'un photon est donnée par la première relation de Planck-Einstein $E = h\nu$, avec $\nu = \frac{c}{\lambda}$ la fréquence du photon. On obtient donc

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{33}$$

C'est la formule de De Broglie reliant l'impulsion et la longueur d'onde d'un photon. Cette formule est fondamentale en mécanique quantique car elle relie une quantité usuellement associé à une particule, l'impulsion, à une quantité usuellement associé aux ondes, la longueur d'onde.

Pour retrouver les formules de mécanique classique, on peut supposer être à basse vitesse et approximer l'équation (31) pour γ proche de 1. On obtient

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2 + \frac{mc^2}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{34}$$

On reconnaît ici l'énergie cinétique habituelle, en plus du terme donné par l'équation (32) correspondant à l'énergie de l'objet au repos.

Qu'advient-il des lois de conservations ? En mécanique classique, l'énergie et l'impulsion totale d'un système fermé sont conservées. La relativité restreinte respecte toujours ce principe, avec l'énergie et l'impulsion relativistes. Les deux lois de conservation peuvent être accumulées en un seul principe : la conservation du quadrivecteur impulsion total dans un système fermé. Supposons que nous avons un système physique avec n objets, et notons P_k^i le quadrivecteur impulsion du $k^{\text{ième}}$ objet. Alors le quadrivecteur impulsion total P_{tot}^i défini par

$$P_{\text{tot}}^i = \sum_{i=1}^{n} P_k^i \tag{35}$$

est toujours conservé dans un système fermé, pour chaque i. Pour $i = 0$ nous avons la conservation de l'énergie relativiste tandis que pour $i = 1, 2, 3$ nous avons la conservation de l'impulsion relativiste.

Il est intéressant de noter que puisque le quadrivecteur impulsion total est conservé, sa norme l'est aussi. C'est une constante qui ne change pas dans le temps, et qui ne change pas en fonction du référentiel. C'est la masse totale invariante. Attention cependant, car la norme de P_k^i n'est pas égale à la somme des normes des P_k^i. Cela veut dire que la masse n'est pas toujours conservée.

4.4 Force et puissance

Maintenant que nous avons à notre disposition une notion relativiste d'impulsion, nous pouvons chercher à appliquer la première loi de Newton de manière relativiste pour obtenir la trajectoire d'objets subissant des forces. Cela demande cependant de bonnes connaissances en mécanique, et le contenu de cette sous-section n'est donc pas au programme des IPhOs pour les lycéens.

La première loi de Newton nous dit que pour un objet d'impulsion $\vec{p}$ subissant une force externe $\vec{F}$, nous avons

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{36}$$

En insérant l'expression de l'impulsion relativiste, nous obtenons l'équation relativiste du mouvement

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(\gamma m\vec{v})}{\mathrm{d}t}} \tag{37}$$

Le temps t et la force $\vec{F}$ dépendent ici du référentiel, mais il est toujours possible de fixer un référentiel pour faire tous les calculs. Nous avons vu précédemment que $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$. En notant $\vec{a}\ \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, nous pouvons trouver

$$\frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \quad , \qquad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \tag{38}$$

En développant l'équation (37), nous avons

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} \tag{39}$$

Le premier terme correspond à la partie classique de l'équation du mouvement, tandis que le deuxième est une correction ajoutée dû aux effets relativistes. Nous pouvons déjà voir que c'est un terme qui va dans le même sens que le mouvement de l'objet, et qui croit très vite avec γ. Ajouter un terme à $\vec{F}$ dans le sens de la vélocité revient à enlever un terme à l'accélération $\vec{a}$ dans le sens de la vélocité. Autrement dit, la correction relativiste limite l'accélération dans la direction du mouvement, donc limite la manière dont la force augmente la vitesse de l'objet. Nous pouvons déjà imaginer que ce terme est ce qui empêche un objet de dépasser la vitesse de la lumière. Pour mieux comprendre cet effet, nous pouvons diviser la force $\vec{F}$ et l'accélération $\vec{a}$ en deux parties : une partie parallèle au mouvement, $\vec{F}_\parallel$ $\parallel$ et $\vec{a}_\parallel$, et une partie orthogonale au mouvement, $\vec{F}_\perp$ et $\vec{a}_\perp$, de sorte à ce que nous ayons

$$\vec{F}_\parallel\cdot\vec{v} = F_\parallel v \quad , \qquad \vec{F}_\perp\cdot\vec{v} = 0 \tag{40}$$

et de même pour l'accélération. En injectant ces termes dans l'équation (39) et en simplifiant, nous obtenons

$$\vec{a}_\parallel = \frac{\vec{F}_\parallel}{\gamma^3 m} \quad , \qquad \vec{a}_\perp = \frac{\vec{F}_\perp}{\gamma m} \tag{41}$$

Dans le cas d'une force perpendiculaire au mouvement, comme dans le cas d'un champs magnétique, il n'y a presque aucune correction relativiste à faire : nous avons simplement $\vec{F} = m\gamma\vec{a}$, où le $\gamma\vec{a}$ vient du fait que la vitesse relativiste est $\gamma\vec{v}$. C'est attendu, parce qu'une force parallèle au mouvement ne change pas la vitesse de l'objet mais le fait simplement tourner. Par contre, dans le cas d'une force parallèle au mouvement, il y a une large correction quand la vitesse est grande : avec une force fixe, l'accélération décroît d'un facteur $1/\gamma^2$ de plus que la normale, empêchant l'objet d'atteindre la vitesse de la lumière.

Regardons maintenant la puissance P. Il existe usuellement deux manière de la calculer, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ou $P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. Avec $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$ et en utilisant la première manière de calculer P, on obtient facilement

$$P = \vec{F}_\parallel \cdot \vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}_\parallel \cdot \vec{v}) = m\gamma^3(\vec{a} \cdot \vec{v}) \tag{42}$$

De l'autre côté, en se rappelant que $E = \gamma mc^2$, on a

$$P = mc^2 \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = m\gamma^3(\vec{a} \cdot \vec{v}) \tag{43}$$

Les deux manières de calculer la puissance aboutissent bien au même résultat.

Tout ce que nous avons fait jusque là dans cette section dépend du temps t, et nécessite donc de se placer dans un référentiel fixe. Mais nous pouvons aussi tout faire en terme de quadrivecteurs, pour pouvoir aisément changer de référentiel à l'aide des formules de la section 3.2. Pour obtenir une une force qui se transforme bien sous les transformations de Lorentz, nous pouvons dériver l'impulsion $\vec{p}$ par le temps propre de l'objet plutôt que par un temps arbitraire. Dériver le quadrivecteur impulsion entier plutôt que de ne dériver que sa composante spatiale donne alors un quadrivecteur, le quadrivecteur force. Avec $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ l'impulsion relativiste et $\vec{F}$ le vecteur force qui apparaît dans l'équation (37), nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(E/c, p_x, p_y, p_z) = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E/c, p_x, p_y, p_z) = \gamma(P/c, F_x, F_y, F_z) \tag{44}$$

Définition 8 : Quadrivecteur force

Le quadrivecteur force d'un objet subissant une force $\vec{F}$ d'une puissance P est $(\gamma P/c, \gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z)$

Le quadrivecteur force ne change pas avec les translations, et se transforme comme les autres quadrivecteurs sous les transformations de Lorentz.

Il est intéressant de noter que le quadrivecteur force est la dérivée temporelle du quadrivecteur impulsion, mais lui est orthogonal. En d'autres mots, l'accélération dans l'espace-temps est toujours orthogonal à la direction du mouvement. Le quadrivecteur force courbe notre trajectoire, mais ne peut pas modifier notre vitesse dans l'espace-temps. C'est logique puisque notre vitesse dans l'espace-temps est fixe, c'est c.

Pour finir, nous pouvons changer le référentiel du quadrivecteur force pour voir quelle forme il prend dans le référentiel propre, et comment l'objet ressent la force ou l'accélération. Pour ce faire, il faut booster notre référentiel de la vitesse de l'objet $\vec{v}$ pour aller aussi vite que lui. En décomposant la force en $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$, le quadrivecteur force se transforme comme

$$(\gamma\frac{P}{c},\ \gamma\vec{F}) \longrightarrow (\gamma^2\frac{P}{c} - \beta F_\parallel,\ \gamma\vec{F}_\perp + \gamma^2\vec{F}_\parallel - \gamma^2\frac{P\vec{v}}{c^2}) \tag{45}$$

En notant $\vec{F}_0 = \vec{F}_{0,\parallel} + \vec{F}_{0,\perp}$ la force perçue par l'objet, on a donc

$$\vec{F}_{0,\parallel} = \gamma^2\vec{F}_\parallel - \gamma^2\frac{P\vec{v}}{c^2} \quad \text{et} \quad F_{0,\perp} = \gamma\vec{F}_\perp \tag{46}$$

Pour une petite vitesse, nous avons γ proche de 1 et nous retrouvons bien $\vec{F}_{0,\parallel} = \vec{F}_\parallel$ et $\vec{F}_{0,\perp} = \vec{F}_\perp$.

L'équation (41) nous dit que $\vec{a}_\parallel = \frac{\vec{F}_\parallel}{\gamma^3 m}$ et que $\vec{a}_\perp = \frac{\vec{F}_\perp}{\gamma m}$ tandis que $\vec{a}_{0,\parallel} = \frac{\vec{F}_\parallel}{m}$ et $\vec{a}_{0,\perp} = \frac{\vec{F}_\perp}{m}$ puisque l'objet a une vitesse nulle dans son référentiel propre. En insérant ces relations et en utilisant l'équation (42) pour développer P, on voit $\vec{a}_{0,\parallel} = \gamma^3\vec{a}_\parallel$ et $\vec{a}_{0,\perp} = \gamma^2\vec{a}_\perp$. En d'autre termes,

$$\vec{a}_0 = \gamma^3\vec{a}_\parallel + \gamma^2\vec{a}_\perp \tag{47}$$

Par rapport à ce que nous voyons, l’accélération ressentie par l’objet est plus forte d’un facteur de Lorentz selon la direction de son mouvement que selon la direction perpendiculaire. C’est l’inverse de l’effet que nous avons vu précédemment dans l’équation (41).